

Numéro de place

Numéro d'inscription

Nom

Prénom

Épreuve

Signature

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'enfête

Feuille

Exercice 1

Q1. D'une part $e^x - e^{-x} - 2x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \left(1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!}\right) - 2x + o(x^3)$
 $= \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

D'autre part $2x - \sin(2x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x - \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!}\right) + o(x^3)$
 $= \frac{4}{3} x^3 + o(x^3)$

Ainsi $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{2x - \sin(2x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{4x^3}{3}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{4}$ d'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{2x - \sin(2x)} = \frac{1}{4}}$

Q2. On écrit $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2(1-\frac{1}{n^2})}} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$
 $\uparrow$
 $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$

De même $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

Ainsi $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$
 $= \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$
 $\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$

Exercice 2

Q3. Proposition à démontrer: Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $u_n \geq 0$ et $w_n \geq 0$ ».

Initialisation: Par définition, $u_0 = a \geq 0$ et $w_0 = b \geq 0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie, i.e. $u_n \geq 0$ et $w_n \geq 0$.

Par produit, $u_n w_n \geq 0$ donc $u_{n+1} = \sqrt{u_n w_n}$ a bien du sens et est positif.

Par ailleurs, $w_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2} \geq 0$ comme moyenne de deux nombres positifs.

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion: D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $w_n \geq 0$.

Q4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $(x - y)^2 \geq 0$ en tant que carré d'un réel.

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$\text{d'où } \boxed{xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}}$$

Q5. Pour $n = 0$, on a $u_0 = a \leq b = w_0$ par définition.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après Q4 dans le cas $x = \sqrt{u_{n-1}}$ et $y = \sqrt{w_{n-1}}$, on a

$$u_n = \sqrt{u_{n-1} w_{n-1}} = \sqrt{u_{n-1}} \sqrt{w_{n-1}} \stackrel{Q4}{\leq} \frac{\sqrt{u_{n-1}}^2 + \sqrt{w_{n-1}}^2}{2} = \frac{u_{n-1} + w_{n-1}}{2} = w_n.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq w_n$.

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $u_{n+1} = \sqrt{u_n w_n} \stackrel{Q5}{\geq} \sqrt{u_n u_n} = u_n$ car $u_n \geq 0$.

$$\bullet \quad w_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2} \stackrel{Q5}{\leq} \frac{w_n + w_n}{2} = w_n.$$

Ainsi la suite $(u_n)_n$ est croissante et $(w_n)_n$ est décroissante.

Q7. • Par Q6, la suite $(u_n)_n$ est croissante donc en particulier $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$.

De même, par décroissance de $(w_n)_n$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \leq w_0$.

Enfin, grâce à Q5, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \stackrel{Q5}{\leq} w_n \leq w_0$.

• D'après cette inégalité, la suite $(u_n)_n$ est majorée (par v_0) et elle est croissante (Q6) donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. De même, $(w_n)_n$ converge car elle est décroissante et minorée (par v_0).

Q8. D'après la question précédente on peut considérer $l = \lim u_n$ et $l' = \lim w_n$ ^{deux réels}

En passant à la limite dans la relation $w_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2}$, on obtient $l' = \frac{l + l'}{2}$, ie $2l' = l + l'$ qui équivaut à $l = l'$. Autrement dit $\boxed{\lim u_n = \lim w_n}$

Exercice 3

Q9. N'abord $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^* \quad g(-x) = -x \cdot \text{sh}\left(\frac{1}{-x}\right) = -x \cdot \frac{e^{-1/x} - e^{1/x}}{2} = x \cdot \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{2} = x \cdot \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = g(x)$$

Ainsi $\boxed{g \text{ est paire}}$

$$\text{Q10. } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{2} \stackrel{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} \cdot \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{2u} - \frac{e^{-u}}{2u} = \boxed{+\infty}$$

Par paires, on en déduit $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty}$

croissances comparées donnent $+\infty$

forme $\frac{0}{\infty}$ donc 0

Graphiquement, cela signifie que g admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

Q11. Pour $t \geq 0$, on pose $h(t) = \text{sh}(t) - t \cdot \text{ch}(t)$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions usuelles

et on a $\forall t \geq 0, h'(t) = \text{ch}(t) - (1 \cdot \text{ch}(t) + t \cdot \text{sh}(t)) = -t \cdot \text{sh}(t) \leq 0$ avec égalité si $t=0$

Ainsi h est ^{strictement} décroissante sur $\mathbb{R}_+$. $\boxed{h(0) = 0}$ donc ~~h(t) < 0~~

Or $h(0) = 0$ donc $\boxed{\forall t > 0, h(t) < 0, \text{ ie } \text{sh}(t) < t \cdot \text{ch}(t)}$

Q12. La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions qui le sont.

$\forall x > 0, g'(x) = 1 \cdot \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-1}{x^2} \times \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) < 0$ d'après Q1.

Ainsi g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Par parité (Q9), on en déduit que g est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$.

Q13. On sait que $\text{sh}(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + o(t^5)$.

Ainsi $g(x) = x \cdot \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{120x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right) \right) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$,

ie $a=1, b=d=0$ et $c=\frac{1}{6}$.

Q14. • d'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ donc $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ aux voisinages de $+\infty$.

• Par parité (Q9), il en est de même au voisinage de $-\infty$.

• Pour $x \neq 0$, on a $g(x) - 1 \underset{Q13}{=} \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \geq 0$.

Autrement dit, au voisinage de $+\infty$, la courbe $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de la droite d'équation $y=1$. Par parité, il en est de même pour $-\infty$.

Q15. On commence par représenter les asymptotes obtenues en Q10 et Q14 puis on trace $\mathcal{C}_g$ en respectant les variations obtenues en Q12 et la parité de Q9.

